楕円曲線の Hodge-Arakelov 理論における遠アーベル幾何

講師：望月 新一

（京都大学数理解析研究所）

集中講義の概要：

Grothendieck の「遠アーベル哲学」とは、数体のような数論的な体の上で定義され、かつある幾何的な条件を満たす代数多様体の幾何は、その「数論的基本群」に忠実に反映されるであろうという考え方を出発点とした数論幾何に対する新しいアプローチである。この「哲学」は、１９８０年代初頭、 Diophantus 幾何への応用の期待の下、 Grothendieck によって提案されたが、実は、そのルーツは、それ以前に代数的整数論の観点から発見されていた Neukirch-内田の定理にまで遡る。更に、１９９０年代に入ってから、遠アーベル幾何では新しい結果が次々と得られ ([3], [4])、 Grothendieck が立てた主な予想の一部が、かなり強い形で肯定的に解決された。

本講義では、遠アーベル幾何の survey 的な紹介を目標の一つとするが、ただの抽象的な定理群として扱うのではなく、最近になって明らかになった、楕円曲線の Hodge-Arakelov 理論との関係に注目しながら話を進めていく。この関係が示唆する遠アーベル幾何の新しい解釈によって、当初の Grothendieck の期待でもあった、 Diophantus 幾何への応用の可能性が開けてくるものと思われる。

予備知識としては、 Hartshorne [1] 程度の代数幾何の知識の他、 Milne [2] などに書いてある、étale site や topos, étale 基本群の定義や基本的な性質を仮定する。

シラバス：（変更の可能性あり）

（月）遠アーベル幾何入門。

（火） Hodge-Arakelov 理論入門。

（水） basepoint, core, commensurator の話。

（木） universe, 同期化。

文献：

[1] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. **52**, Springer (1997).

[2] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press (1980).

[3] A. Tamagawa, The Grothendieck Conjecture for Affine Curves, *Compositio Math.* **109** (1997), pp. 135-194.

[4] S. Mochizuki, The Local Pro-p Anabelian Geometry of Curves, *Invent. Math.* **138** (1999), pp. 319-423.

数論的な絶対微分とは何か？

講演者：望月 新一

（京都大学数理解析研究所）

アブストラクト：

代数幾何では、単独の代数多様体だけでなく、「動く多様体」、つまり、別の「base」の多様体に parametrize された、「多様体の族」を考えることがしばしばある。こうした多様体の族の、ある意味ではもっとも基本的な不変量は、その「Kodaira-Spencer 射」である。この射は、簡単に言うと、「族の微分」、つまり、 base の多様体から、 fiber の多様体のモジュライ空間への分類写像の微分である。 Kodaira-Spencer 射は、幾何的な文脈においてもとても有用な道具であるが、特に関数体上の Diophantus 幾何（＝有理点の研究）では、必要不可欠な存在である。

一方、数体のような数論的な base の上でも、抽象的な、スキーム論的な「多様体の族」というものを考察することができるが、この数論的な場合には、（最近まで） Kodaira-Spencer 射の適切な類似がなかったために、関数体上の Diophantus 幾何に関する様々な重要な定理の数論的な類似が証明できなかった。

本講演では、最近になって発見された数論的な Kodaira-Spencer 射とその周辺の話題、更に Diophantus 幾何との関係について解説する。

[1] S. Mochizuki, The Local Pro-p Anabelian Geometry of Curves, *Invent. Math.* **138** (1999), pp. 319-423.

[2] S. Mochizuki, *The Hodge-Arakelov Theory of Elliptic Curves: Global Discretization of Local Hodge Theories*, RIMS Preprint Nos. 1255, 1256 (October 1999), available as .ps file at:

`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/paper/all.html`

講義内容要約

講師：望月 新一 （京都大学数理解析研究所）

２００１年１１月

1. タイトル：楕円曲線の Hodge-Arakelov 理論における遠アーベル幾何

2. 教科書： なし

3. 参考書（文献）：

[1] M. Asada, The faithfulness of the monodromy representations associated with certain families of algebraic curves, *Journ. Pure Appl. Algebra* **159** (2001), pp. 123-147.

[2] J. W. S. Cassels and A. Fröhlich (editors), *Algebraic number theory*, Proceedings of the instructional conference held at the University of Sussex, Brighton, September 1-17, 1965, Academic Press (1986).

[3] P. Deligne and D. Mumford, The Irreducibility of the Moduli Space of Curves of Given Genus, *IHES Publ. Math.* **36** (1969), pp. 75-109.

[4] A. Grothendieck, Letter to G. Faltings (June 1983) in Lochak, L. Schneps, *Geometric Galois Actions; 1. Around Grothendieck's Esquisse d'un Programme*, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **242**, Cambridge Univ. Press (1997).

[5] M. Matsumoto, Galois representations on profinite braid groups on curves, *J. Reine Angew. Math.* **474** (1996), pp. 169-219.

[6] S. Mochizuki, *The Hodge-Arakelov Theory of Elliptic Curves: Global Discretization of Local Hodge Theories*, RIMS Preprint Nos. 1255, 1256 (October 1999).

[7] S. Mochizuki, *The Galois-Theoretic Kodaira-Spencer Morphism of an Elliptic Curve*, RIMS Preprint No. 1287 (July 2000).

[8] S. Mochizuki, *The Hodge-Arakelov Theory of Elliptic Curves in Positive Characteristic*, RIMS Preprint No. 1298 (October 2000).

[9] S. Mochizuki, Correspondences on Hyperbolic Curves, *Journ. Pure Appl. Algebra* **131** (1998), pp. 227-244.

[10] S. Mochizuki, A Version of the Grothendieck Conjecture for p-adic Local Fields, *The International Journal of Math.* **8** (1997), pp. 499-506.

[11] S. Mochizuki, The Profinite Grothendieck Conjecture for Closed Hyperbolic Curves over Number Fields, *J. Math. Sci., Univ. Tokyo* **3** (1996), pp. 571-627.

[12] S. Mochizuki, The Local Pro-p Anabelian Geometry of Curves, *Invent. Math.* **138** (1999), pp. 319-423.

[13] H. Nakamura, A. Tamagawa, and S. Mochizuki, The Grothendieck Conjecture on the Fundamental Groups of Algebraic Curves, *Sugaku Expositions* **14** (2001), pp. 31-53.

[14] J. Neukirch, A. Schmidt, K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der *Mathematischen Wissenschaften* **323**, Springer-Verlag (2000).

[15] J.-P. Serre, *Local Class Field Theory* in *Algebraic Number Theory*, ed. J.W.S. Cassels and A. Fröhlich, Academic Press (1967).

[16] J.-P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag (1980).
[17] J.-P. Serre (with the collaboration of Willem Kuyk and John Labute), *Abelian l-adic Representations and Elliptic Curves*, Addison-Wesley Publishing Company (1989).
[18] *Revêtement étales et groupe fondamental*, Séminaire de Géometrie Algébrique du Bois Marie 1960-1961 (SGA1), dirigé par A. Grothendieck, augmenté de deux exposés de M. Raynaud, *Lecture Notes in Mathematics* **224**, Springer-Verlag (1971).
[19] A. Tamagawa, The Grothendieck Conjecture for Affine Curves, *Compositio Math.* **109** (1997), pp. 135-194.

4. 講義の予備知識： [Hh] 程度のスキーム論と、 [Mn] 等に解説してあるエタール・サイトや代数的基本群の基礎。

[Hh] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. **52**, Springer-Verlag (1977).

[Mn] J. S. Milne, *Étale Cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press (1980).

5. 講義内容：

Grothendieck の「遠アーベル哲学」とは、数体のような数論的な体の上で定義され、かつある幾何的な条件を満たす代数多様体の幾何は、その「数論的基本群」に忠実に反映されるであろうという考え方を出発点とした数論幾何に対する新しいアプローチである。この「哲学」は１９８０年代初頭、 Grothendieck によって提案されたが、実は、そのルーツはそれ以前に代数的整数論の観点から発見されていた Neukirch- 内田の定理にまで遡る。更に、１９９０年代に入ってから、遠アーベル幾何では新しい結果が次々と得られ (参考文献の [12], [19] を参照)、 Grothendieck が立てた主な予想の一部が、かなり強い形で肯定的に解決された。

本講義では、遠アーベル幾何の survey 的な紹介を目標の一つとするが、ただの抽象的な定理群として扱うのではなく、最近になって明らかになった、楕円曲線の Hodge-Arakelov 理論との関係に注目しながら話を進めていく。この関係が示唆する遠アーベル幾何の新しい解釈によって、当初の Grothendieck の期待でもあった、 Diophantus 幾何への応用の可能性が開けてくるものと思われる。

<u>I： 遠アーベル幾何入門</u>
§1. 代数的基本群とは何か？
§2. Grothendieck の anabelian 哲学
§3. 遠アーベル幾何の代表的な定理
§4. 局所体の遠アーベル性

<u>II： Hodge-Arakelov 理論入門</u>
§1. 基本定理
§2. 無限遠点での状況
§3. 正標数的手法による証明

<u>III： basepoint, core, commensurator の話</u>
§1. anabelioid というもの
§2. core
§3. 正則構造

§4. 通約端末性
§5. global multiplicative subspace へのナイーヴなアプローチ

IV： universe, 同期化
§1. 独立な宇宙の導入
§2. 半楕円 orbicurve の通約端末性
§3. 無限遠点における通約端末性
§4. 正則局所化の圏
§5. 主結果

6. 講義の感想（学生に公開）：

講義の最中、教官だけでなく、何回にもわたり、学生の方からも非常に有意義な質問や指摘が出され、講義全体の質に大きく寄与したことは、印象的でした。

7. 講義の感想（学生に非公開）：

名大では、数論的代数幾何の基礎をちゃんと勉強している学生は極めて少ない（またはひょっとして一人もいない）ようで、そのような状況下では、一週間の集中講義だけでできることには限界を感じ、残念に思いました。